Közönséges törtek

2019. jan. 14.

1. Az n természetes szám milyen értékeire léteznek a következő törtek:

a.) $\frac{9}{n}$ c.) $\frac{2}{2n+1}$ e.) $\frac{7}{n^2+n}$

b.) $\frac{17}{n-1}$ d.) $\frac{4}{n(n-1)}$ f.) $\frac{7}{2n+8}$

2. Határozzátok meg az n természetes szám értékeit melyekre a következő törtek természetes számok:

a.) $\frac{36}{n}$ c.) $\frac{15}{2n+1}$ e.) $\frac{n-1}{5}$ g.) $\frac{3n+5}{3n-2}$

b.) $\frac{13}{n+1}$ d.) $\frac{21}{2n-7}$ f.) $\frac{n+2}{n-1}$ h.) $\frac{n+9}{2n-7}$

3. a.) Hány $\frac{\overline{1ab}}{\overline{5c7}}$ alakú tört létezik?

b.) Soroljátok fel az összes $\frac{x}{y}$ alakú törteket, ha $x=5k$, $k \neq 0$ természetes szám, $k \leq 3$ és $21 \vdots y$.

c.) Soroljátok fel $\frac{\overline{12a}}{\overline{72b}}$ alakú törteket, ha $\overline{12a} \vdots 3$ és $5 \mid \overline{72b}$

d.) $\frac{\overline{2x}}{\overline{5y}}$ alakú törteket, ha $\overline{2x}$ és $\overline{5y}$ relatív prímszámok (két természetes szám relatív prímszám, ha legnagyobb közös osztójuk 1)

4. Adott a következő sorozat $\frac{3}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{12}; \ldots$

a.) Írjátok fel a következő három tagot

b.) Melyik tört a 10. a sorban?

c.) Hat. meg az n-dik helyen levő törtet.

d.) $\frac{41}{410}$ hányadik a sorban?

5. Hat. meg az n természetes számot úgy, hogy

a.) $\frac{4}{n+1}$ egységnyi tört   c.) $\frac{4n+2}{4n+11}$ egységnyi tört

b.) $\frac{4n+2}{13}$ valódi tört   d.) $\frac{2n+3}{11}$ áltört.

6. Hat. meg $\overline{xy}$ természetes számot, tudva, hogy:

a.) $\frac{6}{x+y}$ egységen felüli.   c.) $\frac{3x+3y}{36}$ egységnyi tört.

b.) $\frac{7}{x+y+1}$ egységen aluli.

(7.) Hat. meg x és y természetes számokat úgy, hogy egységnyi törtek legyenek a törtek:

a.) $\frac{5}{(x+1)(y-2)}$ b.) $\frac{x^2+y^2}{169}$

(8.) Hat. meg az a és b nullától különböző természetes számok értékét úgy, hogy $\frac{32}{2a+5b}$ egységnyi tört legyen és $a+b$ összeg minimális.

(9.) Mut. ki, hogy:

a.) $\frac{2a+1}{a+2}$ áltört bármely $a>2$ esetén.

b.) $\frac{2a+b}{a+2b}$ valódi tört, bármely $a<b$ esetén.

(10.) Hat. meg az $\overline{abc}$ természetes számot, tudva, hogy $\frac{a^2+b^2+c^2}{5}$

a.) egységnyi tört

b.) valódi tört

(11.) Hat. meg az n természetes szám értékét úgy, hogy $\frac{100}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$ áltört, majd egységnyi tört legyen.

(12.) Hat. meg x, y természetes számokat, tudva, hogy:

a.) $\frac{x}{y}=\frac{1}{6}$ és $2x+3y=100$

b.) $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$ és $xy=135$

(13.) a.) Írjátok fel a $\frac{2}{3}$-dal egyenértékű törteket, amelyeknek nevezője rendre 27, 18, 9, 81.

b.) Egyszerűsítsétek a következő törteket

$\frac{2^2}{4^3}$; $\frac{3^3}{9^2}$; $\frac{2^2 3^4}{6^8}$; $\frac{1001}{11}$; $\frac{7}{1001}$; $\frac{2323}{6969}$; $\frac{2222}{1001}$

(14.) Adott az $F=\frac{n^2+7n}{n^2+n+4}$ tört.

a.) Ha $n=5$, egyszerűsítsétek a törtet.

b.) Mut. ki, hogy F reducibilis bármely természetes szám esetén.

(15.) Hat. meg az n természetes számot úgy, hogy:

a.) $\frac{n+5}{12}$ irreducibilis valódi tört legyen.

b.) $\frac{18}{n+3}$ reducibilis áltört legyen.

(16.) Mutassátok ki, hogy:

a.) $\frac{x^2+x}{4}$ reducibilis

b.) $\frac{3x}{x^2+x}$ reducibilis

c.) $\frac{x}{x+1}$ irreducibilis

d.) $\frac{3x+4}{2x+3}$ irreducibilis.

17.) Egyszerűsítsétek a törtet

$$\frac{\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}\right)\left(\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}\right)}{\left(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}\right)\left(\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}\right)}.$$

18.) Ha n természetes szám, bizonyítsátok be, hogy:

$$\frac{49^n+16\cdot 7^n+55}{2\cdot 7^n+22}$$ természetes szám.

19.) Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{8^n+2^n-(3^n+7^n)}{9^n-4^n}$ egyszerűsíthető egy 0 és 1-től különböző természetes számmal, bármely n természetes szám esetén.

20.) Hasonlítsátok össze az $x=\dfrac{\overline{77\ldots75}}{77\ldots78}$ és $y=\dfrac{\overline{88\ldots85}}{88\ldots89}$ törteket, tudva, hogy minden szám a számlálóból és a nevezőből n számjegyű $n>2$.

21.) Adottak az a és b természetes számok, ahol $a\neq 0$. Ha $\dfrac{a+b}{5a+12b}$ tört egyenértékű az $\dfrac{1}{6}$-dal, számítsd ki $\dfrac{b}{a}$.

22.) Ha $a=\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{41}}{4^{21}}$ és $b=\dfrac{2\cdot\left(1+3+3^2+\ldots+3^{27}\right)+1}{9^{14}}$

bizonyítsátok be, hogy $a<b$.

23.) Hasonlítsátok össze

a.) $\dfrac{1+2+\ldots+45}{2+4+\ldots+90}$ és $\dfrac{2+5+8+\ldots+53}{1+5+9+\ldots+89}$

b.) $\dfrac{2+4+6+\ldots+150}{3+6+9+\ldots+225}$ és $\dfrac{3\left(1+4+\ldots+4^{44}\right)+1}{8^{30}}$

24.) Mutassátok ki, hogy

a.) $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{1}{19}<\dfrac{9}{10}$

b.) $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{19}>\dfrac{9}{20}$